

Українська прикладна математика: щільне ядро перекладу для оцінювання стану, геометрії Лі, VIO/SLAM і Калмана

Поточний робочий пакет

2026-06-02

Contents

1	Контроль якості й фокус цього продовження	2
2	Solà ESKF: щільне українське ядро для IMU-стану	2
2.1	Три стани: істинний, номінальний і похибковий	2
2.2	Номінальна IMU-модель	3
2.3	Похибкова IMU-модель	3
2.4	Дискретизація шуму: де найчастіше ламається переклад	4
2.5	Імпульсна форма Q	4
2.6	IMU-приклад: ізотропні шуми	4
2.7	Корекція, ін'єкція і скидання похибки	5
3	Micro-Lie: групи Лі, збурення і Якобіани для оцінювання	5
3.1	Навіщо потрібна групова нотація	5
3.2	Exp, Log, plus, minus	5
3.3	SO(3)	6
3.4	SE(3)	6
3.5	Похибки, коваріації, композиція	7
3.6	Фактор-графова форма	7
4	Бібліотека VIO/SLAM-нев'язок: розширений перекладний блок	7
4.1	Загальна схема	8
4.2	IMU preintegration	8
4.3	Reprojection residual	8
4.4	Direct photometric alignment	8
4.5	Optical-flow residual	9
4.6	Event-camera residual	9
4.7	LiDAR point-to-plane residual	9

4.8 Radar/Doppler residual	9
4.9 Map/heightmap alignment	9
4.10 Робастні втрати	10
4.11 Перевірки консистентності	10
5 Kalman/Labbe: перші чотири розділи як TeX-міст	10
5.1 g-h filter	10
5.2 Discrete Bayes filter	10
5.3 Добуток гаусіан	11
5.4 Лінійний фільтр Калмана	11
5.5 Правило конверсії notebook-to-TeX	11
6 Черга після цього блоку	11

1 Контроль якості й фокус цього продовження

Джерельний блок: Solà, 1711.02508; micro-Lie, 1812.01537; локальний контекст FetchQuest.

Цей блок є не черговим оглядом, а щільним перекладним ядром для найбільш корисної частини бібліотеки: фільтри стану, геометрія груп Лі, VIO/SLAM-нев'язки, практичні формули Калмана і міст до чисельних методів. Новий пошук літератури тут свідомо не розширювався. Поточний корпус уже має пріоритетні сирцеві пакети: Solà ESKF, micro-Lie, Zuazua, PySDR, SDR survey, Correll robotics, Labbe Kalman, FDM/FEM та Open Optimization. Наступний виграш дає не ширина, а чисте машинозчитуване TeX-перекладення формул і навколишньої технічної прози.

Практичний критерій готовності модуля:

1. формули, позначення, посилання і змінні не зруйновано перекладом;
2. кожен блок має явний зв'язок з реалізацією: стан, шум, нев'язка, матриця Якобі, коваріація, перевірка одиниць;
3. український текст пояснює, що саме інженер має не переплутати: локальна/глобальна похибка, ліве/праве збурення, дискретизація шуму, порядок множення кватерніонів;
4. PDF компілюється XeLaTeX без зниклих кириличних гліфів, кліпінгу заголовків і переповнених таблиць.

Поточний фокус: закрити найважчі вузли для подальших агентів. Це означає: Solà ESKF як еталон для IMU/VIO; micro-Lie як еталон для SO(3), SE(3) та фактор-графів; бібліотека нев'язок VIO/SLAM як міст до сучасних статей; Labbe Kalman як міст від інтуїтивного фільтрування до формальної ESKF-нотації.

2 Solà ESKF: щільне українське ядро для IMU-стану

Джерельний блок: Joan Solà, *Quaternion kinematics for the error-state Kalman filter*, файли ErrorState.tex, Noise.tex, Quaternion.tex.

2.1 Три стани: істинний, номінальний і похибковий

ESKF не оцінює повний нелінійний стан безпосередньо. Він поширює номінальний стан x нелінійною моделлю, а малу похибку δx - лінійною моделлю в дотичному просторі. Для IMU-завдання природний стан має вигляд

$$x = \begin{bmatrix} p \\ v \\ q \\ a_b \\ \omega_b \\ g \end{bmatrix}, \quad \delta x = \begin{bmatrix} \delta p \\ \delta v \\ \delta \theta \\ \delta a_b \\ \delta \omega_b \\ \delta g \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Тут p - положення, v - швидкість, q - одиничний кватерніон орієнтації, a_b і ω_b - зміщення акселерометра й гіроскопа, g - вектор гравітації. Орієнтаційна похибка не є чотиривимірним збуренням кватерніона; вона є тривимірним малим кутом $\delta \theta \in \mathbb{R}^3$.

Виміряні IMU-сигнали записуються як

$$a_m = a + a_b + a_n, \quad \omega_m = \omega + \omega_b + \omega_n, \quad (2)$$

де a_n, ω_n - білий вимірювальний шум. Для випадкового блукання зміщень використовують

$$\dot{a}_b = a_w, \quad \dot{\omega}_b = \omega_w, \quad (3)$$

де a_w, ω_w - неперервні випадкові збурення.

2.2 Номінальна IMU-модель

Номінальна модель інтегрується за вимірними сигналами після віднімання поточних оцінок зміщень:

$$\dot{p} = v, \quad (4)$$

$$\dot{v} = R(q)(a_m - a_b) + g, \quad (5)$$

$$\dot{q} = \frac{1}{2}q \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_m - \omega_b \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$\dot{a}_b = 0, \quad \dot{\omega}_b = 0, \quad \dot{g} = 0. \quad (7)$$

Це рівняння читається так: номінальний стан рухається так, ніби шуму немає, а невизначеність цього припущення переноситься в коваріацію P через похибкову систему.

Для дискретного кроку Δt один простий варіант інтегрування:

$$p_{k+1} = p_k + v_k \Delta t + \frac{1}{2} (R_k(a_{m,k} - a_{b,k}) + g_k) \Delta t^2, \quad (8)$$

$$v_{k+1} = v_k + (R_k(a_{m,k} - a_{b,k}) + g_k) \Delta t, \quad (9)$$

$$q_{k+1} = q_k \otimes \text{Exp}((\omega_{m,k} - \omega_{b,k}) \Delta t). \quad (10)$$

У чистому перекладі треба залишити порядок множення $q \otimes \text{Exp}(\cdot)$ незмінним, бо він фіксує прийняту конвенцію.

2.3 Похибкова IMU-модель

Для локальної похибки орієнтації $\delta\theta$ лінеаризована динаміка має типовий вигляд

$$\delta\dot{p} = \delta v, \quad (11)$$

$$\delta\dot{v} = -R[a_m - a_b]_{\times} \delta\theta - R\delta a_b + \delta g - R a_n, \quad (12)$$

$$\delta\dot{\theta} = -[\omega_m - \omega_b]_{\times} \delta\theta - \delta\omega_b - \omega_n, \quad (13)$$

$$\delta\dot{a}_b = a_w, \quad (14)$$

$$\delta\dot{\omega}_b = \omega_w, \quad (15)$$

$$\delta\dot{g} = 0. \quad (16)$$

Це є головний блок для VIO, INS і SLAM-інтеграції: він показує, як помилки акселерометра, гіроскопа, зміщень та гравітації входять у похибку положення, швидкості й орієнтації.

У матричній формі:

$$\delta\dot{x} = A\delta x + B\tilde{u} + Cw, \quad (17)$$

де $\tilde{u} = (a_n, \omega_n)$ - шум вимірюваного керування, а $w = (a_w, \omega_w)$ - неперервне збурення зміщень. У блоці Solà важливо не змішувати ці два типи випадковості: після дискретизації вони масштабуються по-різному.

2.4 Дискретизація шуму: де найчастіше ламається переклад

Нехай

$$\tilde{u} \sim \mathcal{N}(0, U^c), \quad w^c \sim \mathcal{N}(0, W^c). \quad (18)$$

Шум вимірювання \tilde{u} після вибірки вважається сталим протягом інтервалу інтегрування, тоді як неперервне біле збурення w^c не вибирається, а інтегрується стохастично. Тому

$$F_x = \Phi = e^{A\Delta t}, \quad F_u = B\Delta t, \quad F_w = C, \quad (19)$$

а коваріації дають

$$U = U^c, \quad W = W^c \Delta t. \quad (20)$$

Звідси прогноз коваріації:

$$\hat{\delta x}_{k+1} = F_x \hat{\delta x}_k, \quad (21)$$

$$P_{k+1} = F_x P_k F_x^\top + F_u U F_u^\top + F_w W F_w^\top \quad (22)$$

$$= e^{A\Delta t} P_k (e^{A\Delta t})^\top + \Delta t^2 B U^c B^\top + \Delta t C W^c C^\top. \quad (23)$$

Це один із найцінніших фрагментів для технічного перекладу: множники Δt^2 і Δt не є стилістичною деталлю. Вони визначають реальну величину шуму в дискретному фільтрі.

2.5 Імпульсна форма Q

Багато реалізацій EKF пишуть коротше:

$$P_{k+1} = F_x P_k F_x^\top + Q. \quad (24)$$

У цьому записі

$$Q = \Delta t^2 B U^c B^\top + \Delta t C W^c C^\top. \quad (25)$$

Якщо імпульси не діють на весь стан, зручніше ввести матрицю вкладення F_i :

$$\delta x_{k+1} = F_x \delta x_k + F_i i, \quad (26)$$

$$i \sim \mathcal{N}(0, Q_i), \quad (27)$$

$$P_{k+1} = F_x P_k F_x^\top + F_i Q_i F_i^\top. \quad (28)$$

Ці форми еквівалентні, якщо

$$F_i Q_i F_i^\top = Q. \quad (29)$$

2.6 IMU-приклад: ізотропні шуми

Для акселерометра і гіроскопа з однаковими характеристиками по трьох осях часто задають скалярні стандартні відхилення

$$\sigma_{a_n} [m/s^2], \quad \sigma_{\omega_n} [rad/s], \quad \sigma_{a_w} [m/s^2 \sqrt{s}], \quad \sigma_{\omega_w} [rad/s \sqrt{s}]. \quad (30)$$

Тоді

$$U^c = \begin{bmatrix} \sigma_{a_n}^2 I & 0 \\ 0 & \sigma_{\omega_n}^2 I \end{bmatrix}, \quad W^c = \begin{bmatrix} \sigma_{a_w}^2 I & 0 \\ 0 & \sigma_{\omega_w}^2 I \end{bmatrix}. \quad (31)$$

Для імпульсної форми:

$$Q_i = \text{diag}(\sigma_{a_n}^2 \Delta t^2 I, \sigma_{\omega_n}^2 \Delta t^2 I, \sigma_{a_w}^2 \Delta t I, \sigma_{\omega_w}^2 \Delta t I). \quad (32)$$

2.7 Корекція, ін'єкція і скидання похибки

Після вимірювання z з моделлю $h(x)$ стандартний крок:

$$r = z - h(x), \quad (33)$$

$$S = HPH^T + R, \quad (34)$$

$$K = PH^T S^{-1}, \quad (35)$$

$$\widehat{\delta x} = Kr, \quad (36)$$

$$P^+ = (I - KH)P(I - KH)^T + K R K^T. \quad (37)$$

Останній рядок - форма Джозефа. Вона дорожча, але краще зберігає симетрію і додатну напіввизначеність P .

Ін'єкція переносить оцінену похибку у номінальний стан:

$$p \leftarrow p + \widehat{\delta p}, \quad v \leftarrow v + \widehat{\delta v}, \quad (38)$$

$$q \leftarrow q \otimes \text{Exp}(\widehat{\delta \theta}), \quad a_b \leftarrow a_b + \widehat{\delta a_b}, \quad (39)$$

$$\omega_b \leftarrow \omega_b + \widehat{\delta \omega_b}, \quad g \leftarrow g + \widehat{\delta g}. \quad (40)$$

Після ін'єкції похибковий стан повертають до нуля, але коваріацію треба перенести через яacobіан скидання:

$$P \leftarrow GPG^T. \quad (41)$$

Переклад не має "спростити" цей крок. Якщо пропустити `reset-jacobian`, фільтр може виглядати працездатним на коротких траєкторіях і бути неконсистентним на довших.

3 Micro-Lie: групи Лі, збурення і Яcobіани для оцінювання

Джерельний блок: Solà, Dera y, Atchuthan, *A micro Lie theory for state estimation in robotics*, файли `manifolds.tex`, `S03.tex`, `SE3.tex`.

3.1 Навіщо потрібна групова нотація

У навігації й робототехніці стан часто лежить не в плоскому просторі \mathbb{R}^n , а на многовиді: орієнтація в $SO(3)$, поза в $SE(3)$, комбінація швидкостей, зміщень і калібрувань у добутку груп і векторних просторів. Якщо переплутати евклідову різницю з груповою похибкою, лінеаризація стає залежною від координат і може псувати коваріацію.

Група Лі \mathcal{M} має групову операцію \circ , одиницю e і обернений елемент X^{-1} . Її дотичний простір в одиниці - алгебра Лі \mathfrak{m} , яку для обчислень ототожнюють із \mathbb{R}^m через оператори `hat/vee`:

$$\tau \in \mathbb{R}^m, \quad \tau^\wedge \in \mathfrak{m}, \quad (\tau^\wedge)^\vee = \tau. \quad (42)$$

3.2 Exp, Log, plus, minus

Експоненціальна мапа переносить малий вектор з дотичного простору на групу:

$$X = \text{Exp}(\tau), \quad \tau = \text{Log}(X). \quad (43)$$

Правий плюс і правий мінус часто визначають так:

$$X \oplus \tau = X \circ \text{Exp}(\tau), \quad (44)$$

$$Y \ominus X = \text{Log}(X^{-1} \circ Y). \quad (45)$$

Лівий плюс/мінус мають інший порядок множення. У перекладі й коді це треба фіксувати явно, бо ліві та праві Якобіани відрізняються знаком і adjoint-перенесенням.

3.3 SO(3)

Для $\phi \in \mathbb{R}^3$ позначимо $\theta = \|\phi\|$. Nat-оператор:

$$\phi^\wedge = [\phi]_\times = \begin{bmatrix} 0 & -\phi_3 & \phi_2 \\ \phi_3 & 0 & -\phi_1 \\ -\phi_2 & \phi_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (46)$$

Експонента Rodrigues:

$$\text{Exp}(\phi) = I + \frac{\sin \theta}{\theta} \phi^\wedge + \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} (\phi^\wedge)^2. \quad (47)$$

Логарифм, для $R \in \text{SO}(3)$:

$$\text{Log}(R) = \frac{\theta}{2 \sin \theta} (R - R^\top)^\vee, \quad \theta = \cos^{-1} \left(\frac{\text{tr}(R) - 1}{2} \right). \quad (48)$$

Поблизу нуля треба застосовувати розклади Тейлора, а не наївне ділення на θ .

Правий Якобіан SO(3):

$$J_r(\phi) = I - \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \phi^\wedge + \frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} (\phi^\wedge)^2. \quad (49)$$

Лівий Якобіан:

$$J_l(\phi) = J_r(-\phi). \quad (50)$$

Ці матриці потрібні для коректної лінеаризації збурень, інтеграції кутових швидкостей і перенесення коваріацій на многовиді.

3.4 SE(3)

Елемент $T \in \text{SE}(3)$ записують як

$$T = \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R \in \text{SO}(3), \quad t \in \mathbb{R}^3. \quad (51)$$

Для $\xi = (\rho, \phi) \in \mathbb{R}^6$ маємо

$$\xi^\wedge = \begin{bmatrix} \phi^\wedge & \rho \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (52)$$

Експонента:

$$\text{Exp}(\xi) = \begin{bmatrix} \text{Exp}(\phi) & V(\phi)\rho \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (53)$$

де $V(\phi)$ збігається з лівим Якобіаном SO(3) у поширеній конвенції:

$$V(\phi) = I + \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \phi^\wedge + \frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} (\phi^\wedge)^2. \quad (54)$$

Adjoint для $T = (R, t)$:

$$\text{Ad}_T = \begin{bmatrix} R & [t]_{\times} R \\ 0 & R \end{bmatrix}. \quad (55)$$

Його головна роль - переносити мале збурення між системами координат:

$$T \text{Exp}(\xi) = \text{Exp}(\text{Ad}_T \xi) T. \quad (56)$$

3.5 Похибки, коваріації, композиція

Якщо X має праве мале збурення $X = \bar{X} \text{Exp}(\epsilon)$, $\epsilon \sim \mathcal{N}(0, P)$, і $Y = f(X)$, тоді локально

$$\delta y \approx J \epsilon, \quad P_Y \approx J P J^T. \quad (57)$$

Для композиції $Z = XY$ похибка часто має вигляд

$$\delta z \approx \text{Ad}_{Y^{-1}} \delta x + \delta y, \quad (58)$$

залежно від правої/лівої конвенції. Саме тут автоматичні переклади часто стають небезпечними: вони можуть правильно перекласти слова, але залишити неоднозначним, чи похибка множиться зліва, чи справа.

3.6 Фактор-графова форма

Для фактору $r_i(x)$ задача найменших квадратів:

$$\min_{\delta x} \sum_i \|r_i(x \oplus \delta x)\|_{\Sigma_i^{-1}}^2. \quad (59)$$

Лінеаризація:

$$r_i(x \oplus \delta x) \approx r_i(x) + J_i \delta x. \quad (60)$$

Нормальні рівняння:

$$\left(\sum_i J_i^T \Sigma_i^{-1} J_i \right) \delta x = - \sum_i J_i^T \Sigma_i^{-1} r_i. \quad (61)$$

Оновлення:

$$x \leftarrow x \oplus \delta x. \quad (62)$$

Це є спільна мова для ESKF, VIO, SLAM, bundle adjustment і калібрування.

4 Бібліотека VIO/SLAM-нев'язок: розширений перекладний блок

Джерельний блок: Похідний практичний модуль для current VIO/SLAM, event-camera, LiDAR/radar, map-aided localization.

4.1 Загальна схема

Кожна нев'язка повинна мати однаковий опис: стан, вимір, прогноз, нев'язка, Якобіан, коваріація, одиниці, відмова/деградація. У TeX-модулі це краще тримати як повторюваний шаблон, щоб локальні агенти не перетворювали статті на несумісні фрагменти.

Нехай стан у вузлі i :

$$x_i = (R_i, p_i, v_i, b_i^a, b_i^\omega), \quad (63)$$

а поза камери відносно тіла $T_{CB} = (R_{CB}, p_{CB})$. Точка світу P^W проектується як

$$P^C = R_{CB} R_i^T (P^W - p_i) + p_{CB}, \quad \hat{u} = \pi(K P^C). \quad (64)$$

4.2 IMU preintegration

Для інтервалу $[i, j]$ preintegration дає виміри $\hat{\alpha}_{ij}, \hat{\beta}_{ij}, \hat{\gamma}_{ij}$. Нев'язка:

$$r_\alpha = R_i^T (p_j - p_i - v_i \Delta t - \frac{1}{2} g \Delta t^2) - \hat{\alpha}_{ij}, \quad (65)$$

$$r_\beta = R_i^T (v_j - v_i - g \Delta t) - \hat{\beta}_{ij}, \quad (66)$$

$$r_\gamma = 2 \text{vec} \left(\hat{\gamma}_{ij}^{-1} \otimes q_i^{-1} \otimes q_j \right), \quad (67)$$

$$r_b = \begin{bmatrix} b_j^a - b_i^a \\ b_j^\omega - b_i^\omega \end{bmatrix}. \quad (68)$$

Одиниці: r_α у метрах, r_β у m/s , r_γ у радіанах. Коваріація preintegration має переносити шум IMU, зміщення і дискретизаційний крок.

4.3 Reprojection residual

Для ознаки P^W і піксельного виміру u :

$$r_{\text{repr}} = u - \pi \left(K T_{CB} T_{BW} P^W \right). \quad (69)$$

Якобіан має містити похідну проєкції, похідну камерального перетворення і похідну пози/точки:

$$J = \frac{\partial r}{\partial \pi} \frac{\partial \pi}{\partial P^C} \frac{\partial P^C}{\partial \delta x}. \quad (70)$$

Типова помилка перекладу - назвати T_{CB} "позицією камери" без уточнення напрямку перетворення. Треба явно писати: з body у camera або з camera у body.

4.4 Direct photometric alignment

Для пікселя u у кадрі i з глибиною $d(u)$:

$$r_{\text{photo}} = I_j \left(\pi \left(T_{ji} \pi^{-1}(u, d(u)) \right) \right) - I_i(u). \quad (71)$$

Цей блок потребує робастних втрат, бо яскравість, blur, експозиція і динамічні об'єкти створюють heavy-tail залишки.

4.5 Optical-flow residual

Якщо потік дає відповідність $u_i \mapsto u_j$, то

$$r_{\text{flow}} = u_j - \pi \left(T_{ji} \pi^{-1}(u_i, d_i) \right). \quad (72)$$

При невідомій глибині треба або оцінювати inverse depth $\lambda = 1/d$, або тримати епіполярну нев'язку.

4.6 Event-camera residual

Подія має вигляд

$$e_k = (u_k, t_k, p_k), \quad (73)$$

де u_k - піксель, t_k - час, $p_k \in \{-1, +1\}$ - полярність. Для time surface $S(u, t)$ можна писати нев'язку

$$r_{\text{event}} = S(\pi(T(t_k)P), t_k) - S_{\text{ref}}(u_k). \quad (74)$$

Критично: події асинхронні. Стан $T(t_k)$ або інтерполюється між вузлами, або оцінюється неперервно-часовою моделлю. Тому цей розділ пов'язаний з B-spline/GP state estimation.

4.7 LiDAR point-to-plane residual

Для точки p_l і площини з нормаллю n та точкою p_0 :

$$r_{\text{plane}} = n^T (T p_l - p_0). \quad (75)$$

Цей залишок має одиниці метрів і добре працює для локальної геометрії, але погано визначає рух уздовж великих плоских поверхонь без додаткових факторів.

4.8 Radar/Doppler residual

Для радіального виміру швидкості:

$$r_{\text{doppler}} = z_v - \hat{d}^T (v + \omega \times r_s), \quad (76)$$

де \hat{d} - одиничний напрямок променя, r_s - плече сенсора відносно тіла. Цей фактор корисний там, де візуальна текстура погана, але має складну модель outlier-ів.

4.9 Map/heightmap alignment

Для висотної карти $h_M(x, y)$ і оціненого положення $p = (x, y, z)$:

$$r_h = z - h_M(x, y). \quad (77)$$

Якобіан:

$$\frac{\partial r_h}{\partial p} = \begin{bmatrix} -\partial_x h_M & -\partial_y h_M & 1 \end{bmatrix}. \quad (78)$$

Це добрий приклад, де сучасна література прямо підказує математичний блок для перекладу: drift correction = residual + robust loss + map uncertainty.

4.10 Робастні втрати

Huber:

$$\rho(s) = \begin{cases} s, & s \leq c^2, \\ 2c\sqrt{s} - c^2, & s > c^2. \end{cases} \quad (79)$$

Cauchy:

$$\rho(s) = c^2 \log \left(1 + \frac{s}{c^2} \right). \quad (80)$$

Для кожної нев'язки потрібно вказувати, чи робастність застосовується до скалярного залишку, до χ^2 -нормованого залишку, або до блока векторної нев'язки.

4.11 Перевірки консистентності

Для фільтрів:

$$\text{NIS} = r^\top S^{-1} r, \quad \text{NEES} = e^\top P^{-1} e. \quad (81)$$

Для SLAM/VIO:

$$\text{ATE} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_k \|p_k - \hat{p}_k\|^2}, \quad \text{RPE}_{ij} = \text{Log} \left((T_i^{-1} T_j)^{-1} (\hat{T}_i^{-1} \hat{T}_j) \right). \quad (82)$$

Ці метрики мають перекладатися разом з формулами, інакше статті про VIO лишаються набором алгоритмічних тверджень без способу перевірити якість.

5 Kalman/Labbe: перші чотири розділи як TeX-міст

Джерельний блок: *Labbe, Kalman and Bayesian Filters in Python*; ціль - перевести notebook/Markdown у чисті українські TeX-модулі.

5.1 g-h filter

Найпростіший фільтр пояснює ідею prediction-update без матриць. Для скалярного стану:

$$\hat{x}_{k|k-1} = \hat{x}_{k-1} + \dot{x}_{k-1} \Delta t, \quad (83)$$

$$r_k = z_k - \hat{x}_{k|k-1}, \quad (84)$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k|k-1} + g r_k, \quad (85)$$

$$\dot{x}_k = \dot{x}_{k-1} + h \frac{r_k}{\Delta t}. \quad (86)$$

Український модуль має пояснити, що g коригує положення, а h коригує швидкість. Це не "gain" як прибуток, а коефіцієнт підсилення/ваги корекції.

5.2 Discrete Bayes filter

Для дискретної сітки станів:

$$\overline{bel}(x_t) = \sum_{x_{t-1}} p(x_t | x_{t-1}, u_t) \overline{bel}(x_{t-1}), \quad (87)$$

$$bel(x_t) = \eta p(z_t | x_t) \overline{bel}(x_t). \quad (88)$$

Технічний переклад має зберегти різницю між prior/prediction \overline{bel} і posterior bel .

5.3 Добуток гаусіан

Якщо

$$x \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2), \quad x \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2), \quad (89)$$

то ненормований добуток пропорційний гаусіані з

$$\mu = \frac{\sigma_2^2 \mu_1 + \sigma_1^2 \mu_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}, \quad (90)$$

$$\sigma^2 = \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}. \quad (91)$$

Це найкоротший шлях пояснити, чому точніший сенсор має більшу вагу.

5.4 Лінійний фільтр Калмана

Модель:

$$x_k = F_k x_{k-1} + B_k u_k + w_k, \quad w_k \sim \mathcal{N}(0, Q_k), \quad (92)$$

$$z_k = H_k x_k + v_k, \quad v_k \sim \mathcal{N}(0, R_k). \quad (93)$$

Прогноз:

$$\hat{x}_{k|k-1} = F_k \hat{x}_{k-1|k-1} + B_k u_k, \quad (94)$$

$$P_{k|k-1} = F_k P_{k-1|k-1} F_k^\top + Q_k. \quad (95)$$

Оновлення:

$$y_k = z_k - H_k \hat{x}_{k|k-1}, \quad (96)$$

$$S_k = H_k P_{k|k-1} H_k^\top + R_k, \quad (97)$$

$$K_k = P_{k|k-1} H_k^\top S_k^{-1}, \quad (98)$$

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + K_k y_k, \quad (99)$$

$$P_{k|k} = (I - K_k H_k) P_{k|k-1} (I - K_k H_k)^\top + K_k R_k K_k^\top. \quad (100)$$

5.5 Правило конверсії notebook-to-TeX

Код Python не треба перекладати як прозу. Його треба залишати у `lstlisting`, а перед кодом давати український математичний опис: які змінні відповідають F, H, Q, R , які одиниці, яка матриця має бути симетричною, і яка форма графіка очікується після запуску.

Перші чотири Labbe-розділи для агентів:

1. g-h filter: перетворити інтуїтивне пояснення в короткий TeX-модуль.
2. Discrete Bayes: зберегти алгоритм predict/update і приклади нормалізації.
3. Gaussian multiplication: додати формули добутку й згортки.
4. One-dimensional Kalman filters: зв'язати з матричним фільтром і ESKF.

6 Черга після цього блоку

Пріоритет	Що робити	Критерій готовності
P0	Solà ESKF: ErrorState.tex, Noise.tex, ключові частини Quaternion.tex	Повний source-preserved український TeX для IMU/ESKF, з перевіреним порядком кватерніонного множення і дискретизацією шуму.
P0	micro-Lie: manifolds.tex, S03.tex, SE3.tex, derivation_rules.tex	Узгоджені \oplus/\ominus , Exp/Log, adjoint, праві/ліві Якобіани, коваріації.
P0	VIO/SLAM residual library	Один TeX-довідник з IMU, reprojection, photometric, event, LiDAR, radar, map residuals.
P1	Labbe Kalman notebooks 01-04	Чисті TeX-розділи без notebook-метаданих, з кодом як допоміжним матеріалом.
P1	T-ESKF/VINS observability	Модуль про неконсистентність, ненаблюдані підпростори і observability-constrained linearization.
P1	FDM/FEM + optimization	Повернення до ширшої прикладної математики: PDE, слабкі форми, least squares, robust optimization.

Внутрішнє правило джерел: не додавати нову статтю в чергу лише тому, що вона свіжа. Додавати її тоді, коли вона приносить новий математичний об'єкт: нову нев'язку, модель шуму, критерій спостережності, дискретизацію, робастну втрату, метрику якості або обмеження вбудованого обчислення.